Opción A

Ejercicio 1 de la Opción A de septiembre, modelo 3 de 2002.

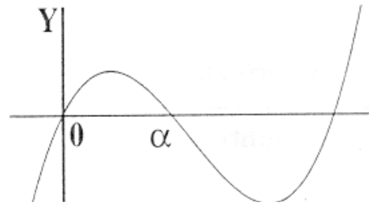
Consideremos $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

(a) [1'5 puntos] Si f fuese la función cuya gráfica aparece en el dibujo, indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando la respuesta:

i) $F(\alpha) = 0$.

ii) $F'(\alpha) = 0$.

iii) F es creciente en $(0,\alpha)$.



(b) [1 punto] Calcula F(1) siendo $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t+1}}$

Solución

(a) $F(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(t)\,dt \neq 0$ porque nos daría el área encerrada por la función f(x), el eje OX entre x = 0 y x = α

$F'(x) = \left(\int_0^x f(t)dt\right)' = f(x)$, según el teorema fundamental del calculo integral, luego $F'(\alpha) = f(\alpha)$ y según la gráfica se observa que $f(\alpha) = 0$.

F es creciente en $(0, \alpha)$ si y solo si $F'(x) > 0$ en $(0, \alpha)$, pero $F'(x) = f(x)$ que es mayor que cero en $(0, \alpha)$, luego F(x) es creciente en dicho intervalo.

(b) $F(1) = \int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{t+1}}\,dt = \left[2\sqrt{t+1}\right]_0^1 = (2\sqrt{2}) - (2\sqrt{1}) = 2(\sqrt{2} - 1)$

Cambio $t + 1 = x^2$

$dt = 2x\,dx$

$\int \dfrac{1}{\sqrt{t+1}}\,dt = \int \dfrac{2x}{\sqrt{x^2}}\,dx = \int \dfrac{2x}{x}\,dx = \int 2dx = 2x =$(quito cambio) $=2\sqrt{t+1}$

Ejercicio 2 de la Opción A de septiembre, modelo 3 de 2002.

Considera la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ para $x \neq 1$

(a) [1 '5 puntos] Calcula las asíntotas de la gráfica de f.

(b) [1 punto] Estudia la posición de la gráfica de f respecto de sus asíntotas.

Solución

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-2x+2}{x-1} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$, x = 1 es una A.V. de f

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-2x+2}{x-1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

Tiene una A.O. y = mx + n porque es una cociente con el numerador de grado una unidad más que el denominador, con

$m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2x+2}{x^2-x} = 1$ $\qquad$ $n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-2x+2}{x-1} - x\right) =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-2x+2-x^2+x}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{-x+2}{x-1}\right) = 1$. luego la A.O. es y = mx + n = 2x + 2. Se puede hacer rápidamente dividiendo numerador entre denominador

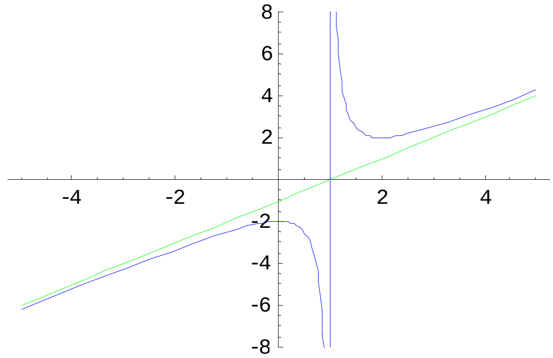
$$\begin{array}{l|l} x^2-2x+2 & x-1 \\ \hline -x^2+x & x-1 \\ \hline -x+2 & \\ +x-1 & \\ \hline \quad 1 & \end{array}$$

Veamos la posición relativa

$\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - (x-1)) = 0^+$, luego f(x) está por encima de la A.O: en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} (f(x) - (x-1)) = 0^-$, luego f(x) está por debajo de la A.O: en $+\infty$

Aunque no la piden la gráfica es



Ejercicio 3 de la Opción A de septiembre, modelo 3 de 2002.

[2'5 puntos] Considera la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & t & 0 \\ t & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcula los valores de *t* para los que el determinante de *A* es positivo y halla el mayor valor que alcanza dicho determinante.

Solución

|A| = 2(2) – t(t – 3) + 0 = $-t^2 + 3t + 4$, que es una función cuadrática. Es decir |A| = f(t) = $-t^2 + 3t + 4$

$t^2 - 3t - 4 = 0$; $t = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$, luego las soluciones son t = -1 y t = 4, es decir la función dada es

- f(t) si $-\infty < t < -1$, puesto que f(-2) = -6 < 0
+ f(t) si $-1 < t < 4$, puesto que f(0) = 4 > 0
- f(t) si $4 < t < +\infty$, puesto que f(5) = - 36 < 0

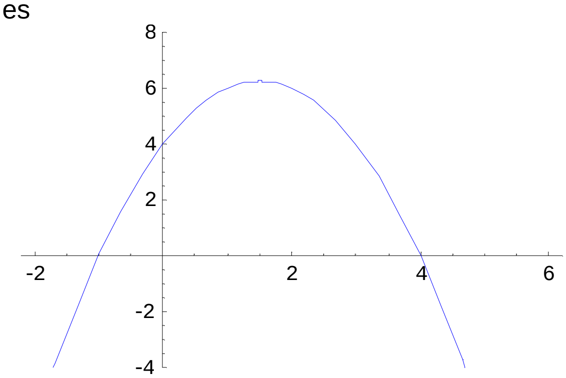
Por tanto el determinante es positivo si $t \in (-1,4)$

|A| = f(t) = $-t^2 + 3t + 4$ tiene por gráfica una parábola con las ramas hacia abajo, por tanto su máximo anula la 1ª derivada y hace negativa la 2ª derivada. Veámoslo

f '(x) = -2t + 3; f '(x) = 0 nos da –2t +3 = 0 de donde x = 3/2 = 1'5

f ''(x) = -2 < 0, luego x = 1'5 es un máximo que vale f(1'5) = $-(1'5)^2 + 3(1'5) + 4$ = 6'25 = 25/4

Aunque no la piden la gráfica es



Ejercicio 4 de la Opción A de septiembre, modelo 3 de 2002

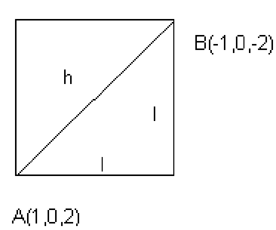
Los puntos A(1,0,2) y B(-1,0,-2) son vértices opuestos de un cuadrado.

(a) [1 punto] Calcula el área del cuadrado.

(b) [1'5 puntos] Calcula el plano perpendicular al segmento de extremos *A* y *B* que pasa por su punto medio.

Solución

(a)

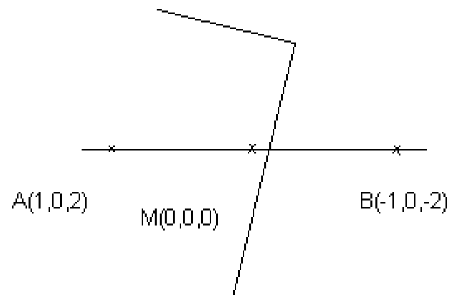


$\overrightarrow{AB}$ =(-2,0,-4)

$h^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{20}$

Área = l² = $\frac{h^2}{2} = \frac{(\sqrt{20})^2}{2}$ = 10 u.a.

(b)



El plano que me piden pasa por el punto medio del segmento M(0,0,0) y tiene como vector normal **n** = $\overrightarrow{AB}$ = (-2,0,-4)

El plano pedido es $\pi \equiv (-2)(x-0) + (0)(y-0) + (-4)(z-0) = 0$. Operando queda $\pi \equiv x + 2z = 0$

Opción B

Ejercicio 1 de la Opción B de septiembre, modelo 3 de 2002.

[2'5 puntos] Estudia la derivabilidad de la función

f : $(0,+\infty) \to R$ definida por f(x) = $\begin{cases} \sqrt{3+x^2} - x & si \quad 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{x^2}{4} & si \quad x > 1 \end{cases}$. Calcula su derivada

Solución

3 + x² siempre es positivo luego $\sqrt{3+x^2}$ siempre tiene sentido y la podemos derivar en (0,1)

1/x no existe para x = 0, pero podemos derivarla en (1, + ∞). Nos faltaría después estudiar la derivada en x = 1

f(x) = $\begin{cases} \sqrt{3+x^2} - x & si \quad 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{x^2}{4} & si \quad x > 1 \end{cases}$. f '(x) = $\begin{cases} \frac{2x}{2\sqrt{3+x^2}} - 1 & si \quad 0 < x < 1 \\ \frac{-1}{x^2} + \frac{2x}{4} & si \quad x > 1 \end{cases}$.

Estudiamos primero la continuidad en x = 1, es decir si $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$

$f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1-} \left(\sqrt{3+x^2} - x\right) = \sqrt{(4)} - 1 = 1.$ $\lim_{x\to 1+} \left(\frac{-1}{x^2} + \frac{x}{2}\right) = -1 + 2 = 1.$

Como si $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$, f(x) es continua en x = 1, por tanto lo es en (0, +∞).

Veamos si es drivable en x = 1, es decir si f '(1⁻) = f '(1⁺)

$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f'(x) = \lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{\sqrt{3+x^2}} - 1\right) = \frac{1}{\sqrt{4}} - 1 = -1/2.$

$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f'(x) = \lim_{x\to 1} \left(\frac{-1}{x^2} + \frac{x}{2}\right) = -1 + 1/2 = -1/2.$

Como f '(1⁻) = f '(1⁺) = = -1/2, existe f '(1), por tanto la función es derivable en (0, + ∞).

Ejercicio 2 de la Opción B de septiembre, modelo 3 de 2002.

[2'5 puntos] Calcula $\int_0^1 \frac{3x^3+1}{x^2-x-2}dx$

Solución

Como el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador tenemos que efectuar la división

$3x^3 + 1$	$x^2 - x - 2$
$-3x^3 + 3x^2 + 6x$	$3x + 3$
$3x^2 + 6x + 1$	

$\overline{-3x^2+3x+6}$

9x+7

$I = \int \frac{3x^3+1}{x^2-x-2}dx = \int \left(3x+3+\frac{9x+7}{x^2-x-2}\right)dx = \frac{3x^2}{2} + 3x + \int \frac{9x+7}{x^2-x-2}dx = \frac{3x^2}{2} + 3x + I_1.$

$I_1 = \int \frac{9x+7}{x^2-x-2}dx = \int \frac{A}{x-2}dx + \int \frac{B}{x+1}dx = \frac{25}{3}\,Ln|x-2| + \frac{2}{3}\,Ln|x+2|$

$x^2 - x - 2 = 0$. Se resuelve y sale x = 2 y x = -1, por tanto $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$

$$\frac{9x+7}{x^2-x-2} = \frac{9x+7}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+1)} = \frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

Para x = -1 $\rightarrow$ - 2 = B(- 3) $\rightarrow$ B = $\frac{2}{3}$; Para x = 2 $\rightarrow$ 25 = A(3) $\rightarrow$ A = $\frac{25}{3}$

Luego $\int_0^1 \frac{3x^3+1}{x^2-x-2}dx = \left[\frac{3x^2}{2}+3x+I_1\right]_0^1 = \left[\frac{3x^2}{2}+3x+\frac{25}{3}Ln|x-2|+\frac{2}{3}Ln|x+1|\right]_0^1 =$

= (3/2 + 3 + 25/3Ln(1) + 2/3Ln(2)) – (0 + 0 + 25/3Ln(2) + 2/3Ln(1)) =

=3/2 + 3 + 2/3Ln(2) – 25/3Ln(2) = 9/2 – 23/3Ln(2)

Ejercicio 3 de la Opción B de septiembre, modelo 3 de 2002.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+3y+z = 3 \\ 2x+my+z = m \\ 3x+5y+mz = 5 \end{cases}$

(a) [1 punto] Determina, si es posible, un valor de m para que el correspondiente sistema tenga una y sólo una solución.

(b) [1 punto] Determina, si es posible, un valor de m para que el correspondiente sistema tenga al menos dos soluciones.

(c) [0'5 puntos] Determina, si es posible, un valor de m para que el correspondiente sistema no tenga solución.

Solución

$\begin{cases} x+3y+z = 3 \\ 2x+my+z = m \\ 3x+5y+mz = 5 \end{cases}$; matriz de los coeficientes A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 3 & 5 & m \end{pmatrix}$; matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & m & 1 & m \\ 3 & 5 & m & 5 \end{pmatrix}$

|A| = 1(m² – 5) – 3(2m – 3) + 1(10 – 3m) = m² – 9m +14.

Resolvemos m² – 9m +14 = 0 y sus soluciones son m = 2 y m = 7.

Si m $\neq$ 2 y m $\neq$ 7 , rango(A) = rango(A *) = 3 y el sistema es compatible y determinado, es decir tiene solución única.

Si m = 2

A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ = - 4 $\neq$ 0, tenemos que rango(A) = 2

En $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ = 0 por tener dos columnas iguales resulta que rango(A^*) = 2.

Como rango(A) = rango(A *) = 2. el sistema es compatible e indeterminado, es decir tiene infinitas soluciones, en particular tiene dos.

Si m = 7

A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ = - 1 $\neq$ 0, tenemos que rango(A) = 2

En $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 7 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ = 0 por tener dos columnas iguales resulta que rango(A^*) = 2.

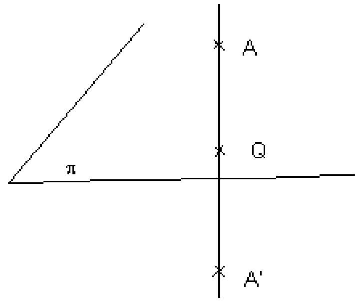
Como rango(A) = rango(A *) = 2. el sistema es compatible e indeterminado, es decir tiene infinitas soluciones, en particular tiene dos.

No hay ningún valor de m para que el sistema no tenga solución

Ejercicio 4 de la Opción B de septiembre, modelo 3 de 2002.

Considera el plano $\pi \equiv x - y + 2z = 3$ y el punto A(-1, -4,2)
(a) [1 punto] Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por *A.*
(b) [1'5 puntos] Halla el punto simétrico de *A* respecto de π .

Solución



$\pi \equiv x - y + 2z = 3$, su vector normal es **n** = (1,-1,2)
La recta que pasa por A y es perpendicular a π, tiene por punto A(-1,-4,2) y como vector director **v** el normal **n** = (1,-1,2)

La recta es $r \equiv \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = -4-\lambda \\ z = 2+2\lambda \end{cases}$

(b)
Para calcular el simétrico del A se obtiene el punto Q intersección de la recta r con el plano π. El punto Q es el punto medio del segmento AA', siendo A' el simétrico buscado.
$Q = r \cap \pi$
$(- 1 +\lambda) - (- 4 - \lambda) + 2(2 + 2\lambda) = 3$. Operando $6\lambda = - 4$, de donde $\lambda = -2/3$
Q(-1 –2/3, -4+2/3, 2 – 4/3) = Q(-5/3, -10/3, 2/3)
Q es el punto medio del segmento AA' luego (-5/3, -10/3, 2/3) =[(x-1)/2, (y-4)/2, (z+2)/2]. Igualando tenemos
(x-1)/2 = -5/3 de donde x = -7/3
(y-4)/2 = -10/3 de donde y = -8/3
(z+2)/2 = 2/3 de donde z = -2/3
El simétrico A' (-7/3, -8/3, -2/3)